Matematica e Elementi Statistica

29/09/14

→ SIMBOLOGIA

QUANTIFICATORI:

$\forall$ = "x OGNI, QUALUNQUE, TUTTI" $\not\forall$ = "NON TUTTI"

$\exists$ = "ESISTE" $\not\exists$ = "NON ESISTE"

es: "NON ESISTE IN AULA UNO STUDENTE CHE ABBIA MENO DI 18 ANNI" = "$\not\exists$ IN AULA UNO STUDENTE CHE ABBIA ETÀ $\leq$ 18 ANNI" o "$\forall$ STUDENTE IN AULA HA ETÀ $>$ 18 ANNI"

(NB) QUANDO SI NEGA UN QUANTIFICATORE, SI PUÒ USARE L'ALTRO NON NEGATO

$\Rightarrow$ / $\nRightarrow$ = "IMPLICA"

es: $A \Rightarrow B$ ("SE È VERA A, ALLORA È VERA ANCHE B")

TEOREMA = "IPOTESI $\Rightarrow$ TESI"

$\Leftrightarrow$ / $\nLeftrightarrow$ = "SE E SOLO SE", È EQUIVALENTE A.. "CONDIZIONE NECESS. E SUFF."

es: SI CONSIDERA T. EQUILATERO $\Leftrightarrow$ T. È EQUIANGOLO

T EQUILATERO $\Rightarrow$ T EQUIANGOLO

T EQUILATERO $\Leftarrow$ T EQUIANGOLO

$A \Leftrightarrow B$ eq. $A \Rightarrow B$ e $B \Rightarrow A$ (2 TEOREMI)

: = "TALE CHE" $\subset$ = "CONTENUTO O UGUALE" $\subsetneq$ = "CONTENUTO, MA NON UGUALE"

→ INSIEMI

INSIEME = NON SI PUÒ DARE UNA DEFINIZIONE, PERCHÉ È UN "CONCETTO PRIMITIVO"

$X = \{\text{CATTEDRA}_1, \text{CATTEDRA}_2, \text{SEDIA}_1, \text{SEDIA}_2\}$ → "DESCRIZIONE x ELENCAZIONE"

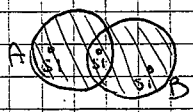
$X = \{\text{NUMERI PARI}\} = \{x \in \mathbb{N} : x = 2m,\ m \in \mathbb{N}\}$ → "DESCRIZ. x CARATTERIZZAZIONE"

X = "INSIEME UNIVERSALE"

(NB) "σ" = VEL IN LATINO NON AUT ~ ~ ~

$A \subset X$ se $\forall x \in A \Rightarrow x \in X$ = "SOTTOINSIEME DI X"

- se $A \subset X$ $B \subset X$ $\rightarrow A \cup B = \{x \in X : x \in A \ \underline{o} \ x \in B\}$ ("GLI ELEMENTI X POSSONO STARE IN A, B o A=B")



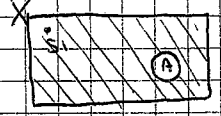
[INSIEME ELASTICO = DIAGRAMMA DI VEN]

- se $A \subset X$ $B \subset X$ $\rightarrow A \cap B = \{x \in X : x \in A \ \underline{e} \ x \in B\}$



$\complement A = \{x \in X : x \notin A\}$

↳ COMPLEMENTARE DI A



$A \times B = \{(x,y) : x \in A \text{ e } y \in B\}$

↓ INSIEME DELLE COPPIE ORDINATE

es: $A = \{R, S, T\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ $\rightarrow A \times B = \{(R,1); (R,2); (R,3); (R,4); (S,1); (S,2); (S,3); (S,4); (T,1); (T,2) \dots\}$

⇓ COORDINATE CARTESIANE



PIANO CARTESIANO = PRODOTTO DI 2 INSIEMI

APPLICAZIONE DI OPERAZIONI FRA INSIEMI:

$(x-1)(x+3) < 0$

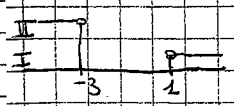
$\begin{cases} x-1>0 \\ x+3<0 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} x-1<0 \\ x+3>0 \end{cases}$

⇓ VANNO (UNITI) I 2 INSIEMI DI SOLUZIONI

È UN SISTEMA = SI INDICA CON $\begin{cases} \\ \\ \end{cases}$; LE 2 RELAZIONI SI DEVONO VERIFICARE CONTEMPORANEAMENTE QUINDI VANNO INTERSECATE

SI RISOLVE:

(a) $\begin{cases} x>1 \\ x<-3 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} x<1 \\ x>-3 \end{cases}$



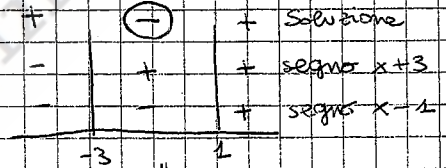


Sol: $\emptyset$ $\cup$ $-3 < x < 1$

(b) SI STUDIA IL SEGNO

$x-1>0$ $\quad x+3>0$

$x>1$ $\quad x>-3$



⇓ $-3 < x < 1$

FUNZIONI o APPLICAZIONI

APPLICAZIONI = QUANDO SI CONSIDERANO INSIEMI GENERICI) CORRISPONDENTE
FUNZIONI = " " " " " " " DI NUMERI "PARTICOLARE"

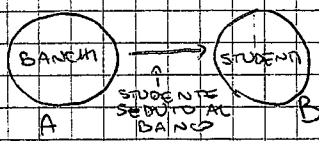
CORRISPONDENZA = LEGGE CHE FA CORRISPONDERE ALL'ELEMENTO DI UN INSIEME, UN ELEMENTO DI UN ALTRO INSIEME

FUNZIONE = def: $f \subseteq A \times B$ funzione da A in B, una corrispondenza che associa ad ogni elemento di A un solo elemento di B.

simb: $f: A \to B$ ("f DA A IN B") → PER CONOSCERE UNA f SI DEVE CONOSCERE TUTTI E 3 GLI ELEMENTI (DESCRIZIONE DI FUNZIONE)

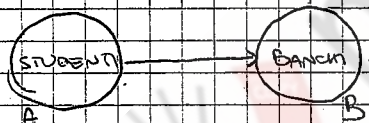
- f ↓ LEGGE DI CORRISPONDENZA (*)
- A → DOMINIO
- B → CODOMINIO

esempio:



= È UNA CORRISPONDENZA MA NON UNA FUNZIONE PERCHÉ OGNI BANCO CONTIENE 6 STUDENTI

... scambiamo Dominio e Codominio..



= È UNA FUNZIONE PERCHÉ A OGNI STUDENTE CORRISPONDE UN SOLO BANCO

def: $f: A \to B$

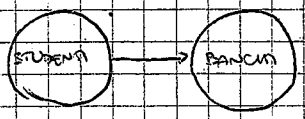
1) f È INIETTIVA SE $\forall x_1, x_2 \in A$ se $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
(ELEMENTI DISTINTI IN A SONO IN CORRISPONDENZA CON ELEMENTI DISTINTI IN B)

2) f È SURIETTIVA SE $\forall y \in B \; \exists x \in A : f(x) = y$
(TUTTI GLI ELEMENTI DI B SONO CORRISPONDENTI / PROVENGONO DA ALMENO UN ELEMENTO DI A)
SURIETTIVA MAI ORA (∃!)

3) f È BIIETTIVA/BIUNIVOCA se $\forall y \in B \; \exists! x \in A : f(x) = y$
(SE f È INIETTIVA E SURIETTIVA)

(*) (NB) LA f SI PUÒ SCRIVERE ANCHE $x \to f(x)$ QUANDO PERÒ SONO NOTI A E B.
$f(x)$ = IMMAGINE DI x

ESEMPIO 2: VEDERE SE f È INIETTIVA



① SI STUDIA L'INIETTIVITÀ: "SE PRENDO 2 STUDENTI DEVONO ESSERE SEDUTI IN 2 BANCHI DIVERSI" ⇒ NO PERCHÉ ANTONELLA E GERRY SONO SEDUTI NELLO STESSO BANCO

(NB) = BASTA TROVARE UNA SITUAZIONE IN CUI LA AFFERMAZIONE NON SI VERIFICA X DIMOSTRARE CHE L'AFFERMAZIONE NON VALE

② SI STUDIA LA SURGETTIVITÀ:
"IN OGNI BANCO CI DEVE ESSERE" ⇒ NO PERCHÉ NELL'ULTIMO BANCO NON È SEDUTO NESSUNO STUDENTE.

③ NON PUÒ ESSERE NEMMENO BIUNIVOCA ANCORA!

ESEMPIO 3:

$f(x) = x^2 \qquad x \to x^2$

DA QUESTA SCRITTURA SI INDIVIDUA LA LEGGE $[\ ]^2$
SI SCEGLIE L'INSIEME + GRANDE DEI NUMERI
(SE FOSSE STATA LA DEFINIZIONE $x \to \sqrt{x}$, SI SAREBBERO SCELTI SOLO I NUMERI +)

- $[\ ]^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

  - INIETTIVA → NO (PERCHÉ SE X PRENDO +2 E −2, HANNO LA STESSA IMMAGINE PERCHÉ $2 \neq -2$ MA $f(2) = f(-2)$)

  - SURGETTIVA → NO (PERCHÉ I N° NEGATIVI NON SONO QUADRATO DI NESSUNO PERCHÉ −3 NON È QUADRATO DI NESSUNO)

- $[\ ]^2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_y$

  - INIETTIVA → SI (PERCHÉ SI CONSIDERANO SOLO I N° POSITIVI)
    PERCHÉ $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1^2 \neq x_2^2$ (SE UN N° È + PICCOLO DELL'ALTRO, ANCHE I QUADRATI CONSERVANO LO STESSO ORDINE).

  - SURGETTIVA → NO (COME SOPRA)

- $[\ ]^2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_y^+$

  - INIETTIVA → SI
  - SURGETTIVA → SI

  ⇒ BIUNIVOCA

→ Funzioni Composte

$f: A \to B$ $\quad g: B \to C$ $\quad$ da 2 corrispondenze a 1 (composta da 2 leggi)

$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$

↓ corrisponderà anche una tra A e C, ovvero a questo passaggio:

simb: $g \circ f$ (leggi insieme) → composto

$x \to g(f(x))$ (nelle operazioni) → esempio: $f(x) = \sqrt{\underbrace{x^2+1}_{f(x)}}$ $\quad g(x)$

$x \xrightarrow{f} x^2+1 = y \xrightarrow{g} \sqrt{y} = \sqrt{x^2+1}$

→ Funzioni Inverse

$f: A \to B$ ① biunivoca (invertibile) = $\forall y \in B \; \exists! \; x \in A : f(x) = y$

Oss. 1 y $\Rightarrow$ 1 solo x (e viceversa)

$x \to y = f(x)$

$f^{-1} = x \leftarrow y$

② ③ $\Rightarrow A \leftarrow B : f^{-1}$ ④

① ② ③ ④ passaggio da f a f^{-1}

esempio: $[\cdot]^2 : \mathbb{R}^+_x \to \mathbb{R}^+_y$ biunivoca

verifichiamo:

$x \to x^2 = y \Rightarrow \mathbb{R}^+_x \leftarrow \mathbb{R}^+_y : \sqrt{\cdot}$ → inversa di f quando Dom e Cod sono $\mathbb{R}$ ④

$\sqrt{y} = x \leftarrow y$

(*)

→ Funzione Identica

Se ho $x \to x$, si definisce $f: A \to A$

$I_A : A \to A$ $\Rightarrow$ (NB) le funzioni cambiano al variare dell'insieme su cui si lavora!

si può indicare in 2 modi

esempio: $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x$ (inversa, quindi invertibile)

$\downarrow$

$\cdot \; f^{-1} \circ f = i_A$ $\qquad$ $\cdot \; \left(f \circ f^{-1}\right)(y) = y = i_B$

(*) oss: $f^{-1} = f$ che composta con una o l'altra da identità in tutti e 2 i modi

(NB) $f^{-1}(y) \neq \frac{1}{f(x)} = \left(f(x)\right)^{-1}$

↓ f inversa $\qquad$ ↓ reciproco di f